Geometria iperbolica 09-04

Nota l'azione di $MCG(S)$ su $Teich(S)$ è data da push-forward della metrica.

Azione di $MCG(T^2)$ su $Teich(T^2)$

$$MCG(T^2) = SL_2(\mathbb{Z}) \qquad Teich(T^2) = \mathbb{H}^2$$

$$SL_2(\mathbb{Z}) \ni \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} : z \longrightarrow \frac{az-b}{-cz+d}$$

Oss: L'azione non è fedele. Infatti il nucleo dell'azione è dato dalla matrice $-Id \in SL_2(\mathbb{Z})$.

Come si comportano i Dehn twist?

$$T_m = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} : z \longrightarrow \frac{z+1}{1}$$

— isometria parabolica con punto fisso $\infty \in \partial \mathbb{H}^2 = \mathbb{R} \cup \{\infty\}$

$$\underset{\mathbb{H}^2}{\overset{\uparrow}{z}} \mapsto z+1$$

Le curve semplici chiuse su T^2 sono in corrispondenza biunivoca con $\mathbb{Q} \cup \{\infty\}$. Fissati m e l, ogni curva semplice chiusa non banale γ si scrive come $p \cdot m + q \cdot l$ (in $H^1(T, \mathbb{Z})$) (p, q coprimi).

$$\gamma \mapsto \frac{p}{q} \in \underset{\underset{\mathbb{R} \cup \{\infty\} = \partial \mathbb{H}^2}{\cap}}{\mathbb{Q} \cup \{\infty\}}.$$

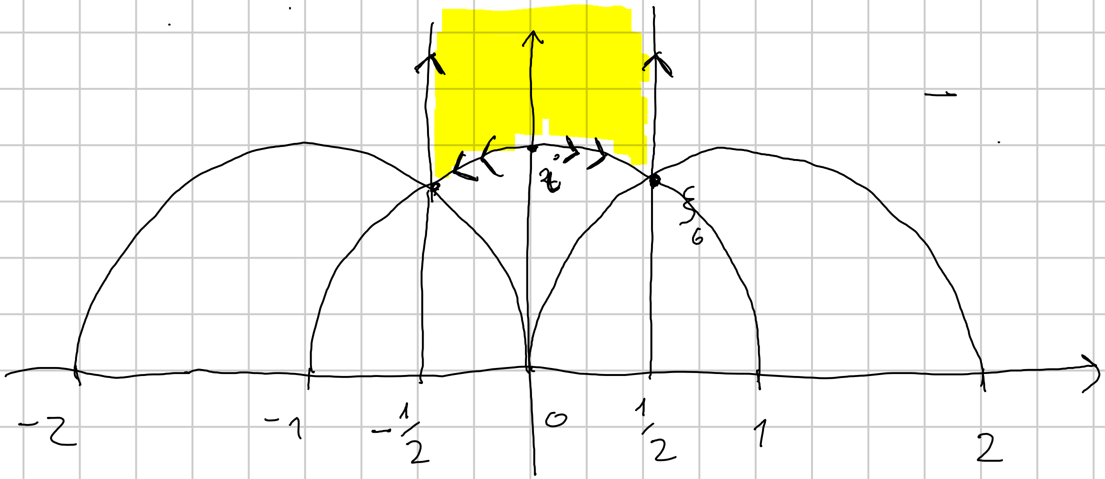
In questo modo γ corrisponde a un punto di $\partial \mathbb{H}^2$.

Prop: Gli elementi di $MCG(T^2)$ della forma T_γ^n corrispondono agli elementi parabolici di $SL(2, \mathbb{Z})$ con punto fisso γ.

Dim: Vero per $\gamma = m$. + $MCG(T^2)$ agisce transitivamente sulle curve semplici chiuse in T^2.

- $Mod(T^2) = \mathbb{H}^2 / PSL(2, \mathbb{Z})$

Un dominio fondamentale è il seguente

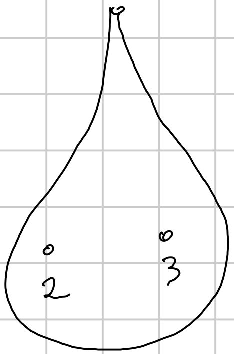


$PSL_2(\mathbb{Z})$ agisce anche tramite

$$z \mapsto -\frac{1}{z}$$

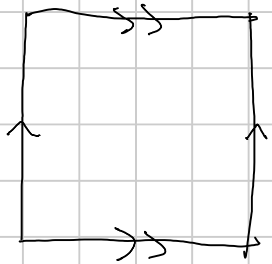
$$A = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$Mod(T^2) =$



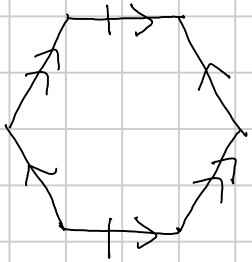
- 2 corrisponde a i
- 3 corrisponde a ξ_6 - radice 6 primitiva di 1.

- $2 = \mathbb{C}^2 / \langle 1, i \rangle =$



rotazione di angolo $\frac{\pi}{2}$

- $3 =$



rotazione di angolo $\frac{\pi}{3}$ nell'esagono

Topologia su $\mathrm{Teich}(S_g)$ $\quad S_g$ superficie chiusa orientabile di genere g

Un punto dello spazio di Teichmuller di S corrisponde

a un'identificazione di S_g con $\mathbb{H}^2/\Gamma$ - discreto e senza punti fissi $\Gamma \leq \mathbb{P}SL_2(\mathbb{R})$

e un isomorfismo tra $\pi_1(S_g)$ e Γ → ben definito a meno di coniugio in $\mathrm{Isom}(\mathbb{H}^2) = \mathbb{P}GL_2(\mathbb{R})$

Otteniamo una rappresentazione $\rho : \pi_1(S_g) \to \mathbb{P}SL_2(\mathbb{R})$

ρ è discreta e fedele.

$DF(\pi_1(S_g), \mathbb{P}SL_2(\mathbb{R}))$ = rappresentazioni discrete e fedeli di $\pi_1(S_g)$ in $\mathbb{P}SL_2(\mathbb{R})$.

C'è una corrispondenza biunivoca tra

$$\mathrm{Teich}(S_g) = \frac{DF(\pi_1(S_g), \mathbb{P}SL_2(\mathbb{R}))}{\mathbb{P}GL(2,\mathbb{R})}$$

$\mathbb{P}GL(2,\mathbb{R})$ → agisce tramite coniugio su $\mathbb{P}SL_2(\mathbb{R})$

$\mathbb{P}GL(2,\mathbb{R}) = \mathrm{Isom}(\mathbb{H}^2)$

(1) $SL_2(\mathbb{R})$ è un gruppo di Lie, infatti $SL_2(\mathbb{R}) \subset GL_2(\mathbb{R}) \subseteq \mathbb{R}^4$

(2) $\mathbb{P}SL_2(\mathbb{R})$ eredita una topologia quoziente

(3) $DF(\pi_1(S_g), \mathbb{P}SL_2(\mathbb{R})) \dashrightarrow \subset \mathbb{P}SL_2(\mathbb{R})^{2g}$

$\pi_1(S_g)$ è generato da $2g$ generatori

Una rappresentazione è univocamente determinata dall'immagine dei generatori

DF eredita una topologia come sottospazio di $\mathbb{P}SL_2(\mathbb{R})^{2g}$

(4) $Teich(S_g)$ è munito della topologia quoziente di $\dfrac{DF(\pi_1(S_g), \mathbb{P}SL_2(\mathbb{R}))}{\mathbb{P}GL_2(\mathbb{R})}$

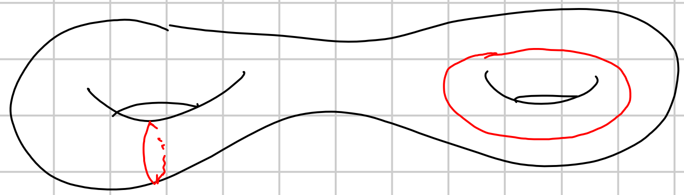
Oss: Nel caso del toro si può definire in modo analogo una topologia su $\mathrm{Teich}(T^2)$ e questa è proprio la topologia $\mathbb{H}^2$.

Inoltre con questa topologia $MCG(S_g)$ agisce tramite omeomorfismi su $\mathrm{Teich}(S_g)$ e in modo propriamente discontinuo.

Coordinate di Fenchel-Nielsen: S_g superficie chiusa orientabile di genere $g \geq 2$.

Sono coordinate <u>globali</u> su $\mathrm{Teich}(S_g)$ e inducono un omeomorfismo the $\mathrm{Teich}(S_g)$ e $\mathbb{R}^{6g-6} \cong \mathbb{R}_{>0}^{3g-3} \times \mathbb{R}^{3g-3}$

Def: Una multicurva in una S_g è un unione finita di curve semplici chiuse non banali a due a due disgiunte

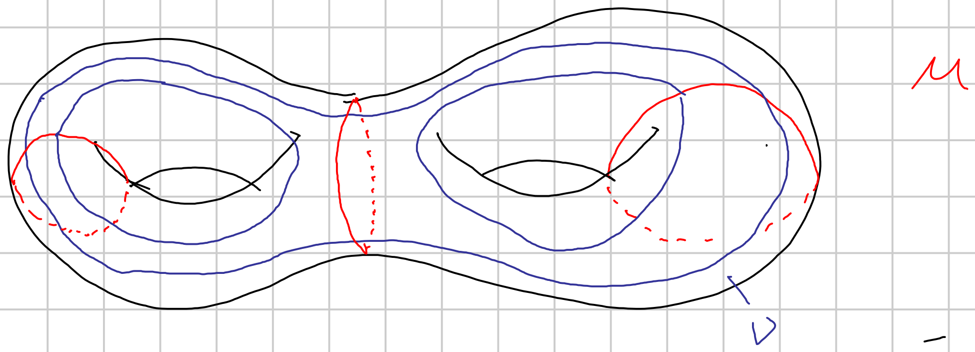


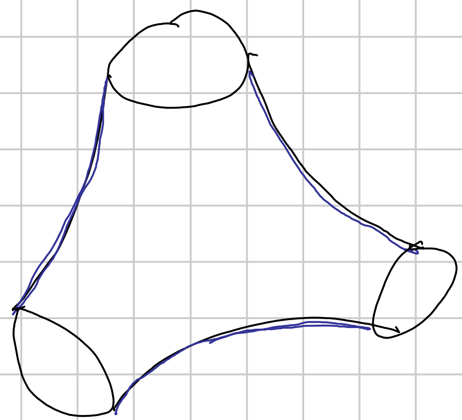
Def: Sia S_g sup. $g \geq 2$. Un <u>frame</u> per S_g è il dato di due multicurve μ e ν in posizione minimale (minimo numero di intersezioni tra μ e ν).

tali che:

(1) La multicurva μ è una pant-decomposition di S_g

(2) La multicurva ν decompone ogni pantalone in due esagoni.





Esercizio: Ogni decomposizione in pantaloni di S_g contiene $3g-3$ curve.

Un frame (μ, ν) induce una mappa di Fenchel-Nielsen:

$$FN: \mathrm{Teich}(S_g) \longrightarrow \mathbb{R}_{>0}^{3g-3} \times \mathbb{R}^{3g-3}$$

$$m \longrightarrow (l_1, \dots, l_{3g-3}, \theta_1, \dots, \theta_{3g-3})$$

1 $l_1, \dots l_{3g}$ - parametri di lunghezza delle curve di μ.

La multicurva μ ha un unico rappresentante geodetico.

$\bar{\mu} = \bar{\gamma}_1 \cup \dots \cup \bar{\gamma}_{3g-3}$

l_i è la lunghezza della geodetica $\bar{\gamma}_i$.

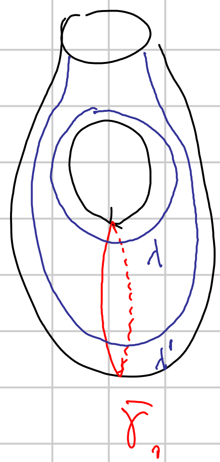
Gli l_i dipendono solo da μ.

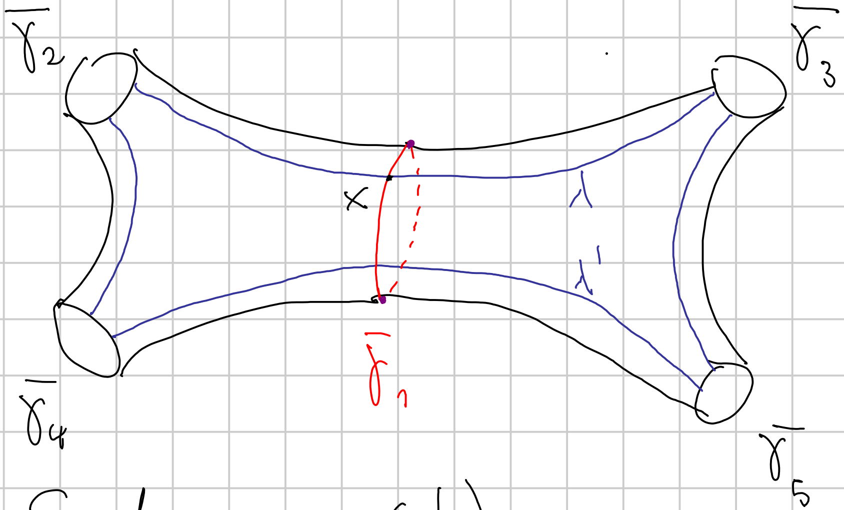
(2) $\Theta_1, \dots, \Theta_{3g-3}$ - parametri di torsione - dipendono da ν.

$\bar{\mu}$ decompone S_g in pantaloni geodetici.

- Supponiamo che due pantaloni siano identificati lungo una $\bar{\gamma}_1$

  $\underbrace{\text{due pantaloni}}_{\text{non necessariamente distinti}}$



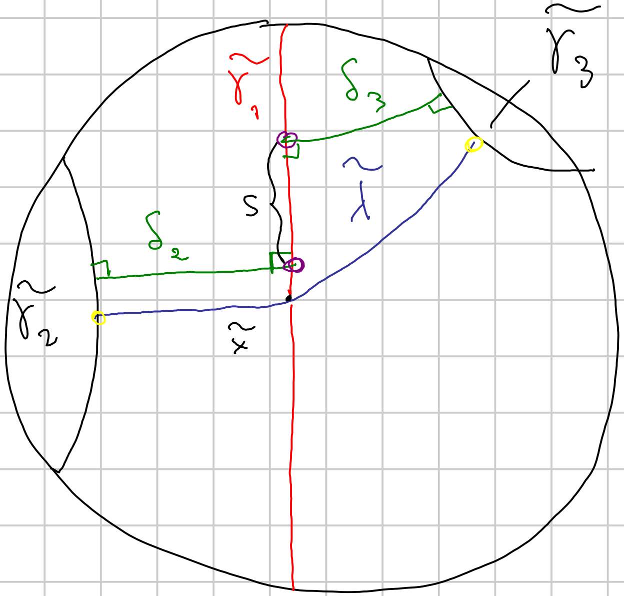


γ interseca l'unione dei due pantaloni in 4 archi (2 archi) e due di questi intersecano $\bar{\gamma}_1$ (λ e λ')

Scegliamone 1 (λ).

1) Scegliamo un sollevamento $\tilde{x} \in \mathbb{H}^2$ del punto $x = \bar{\gamma}_1 \cap \lambda$,

2) Un sollevamento $\tilde{\gamma}_1$ di $\bar{\gamma}_1$



3) Un sollevamento $\tilde\lambda$ dell'arco λ passante per $\tilde x$ che connette due sollevamenti $\tilde\gamma_2$ e $\tilde\gamma_3$ di γ_2 e γ_3

Attenzione $\tilde\lambda$ non è necessariamente geodetico.

Sia δ_3 il segmento geodetico fra $\tilde\gamma_3$ e $\tilde\gamma_1$ (ortogonale a entrambe)

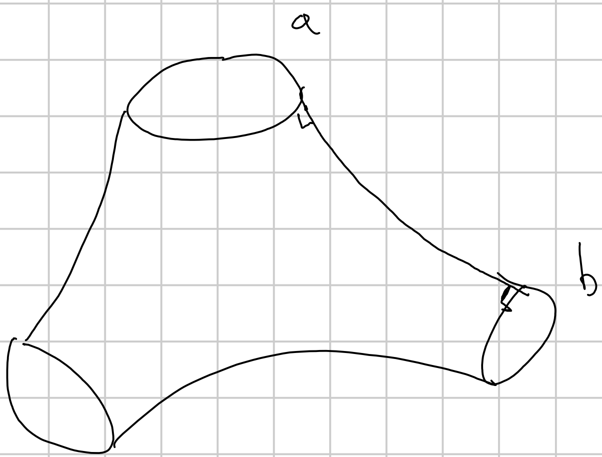
" δ_2 " " " " $\tilde\gamma_2$ e $\tilde\gamma_1$ " " "

Definiamo s la distanza (con segno) tra $\tilde{\gamma}_1 \cap \delta_3$ e $\tilde{\gamma}_1 \cap \delta_2$

s ha segno positivo se un osservatore che cammina lungo δ_2 verso $\tilde{\gamma}_1$ vede $\tilde{\gamma}_1 \cap \delta_3$ alla sua sinistra. (Il segno dipende solo dall'orientazione di S_g).

Ripetiamo questa costruzione per ogni $\tilde{\gamma}_i$ e troviamo $s_i \in \mathbb{R}$ $i = 1, \dots, 3g-3$.

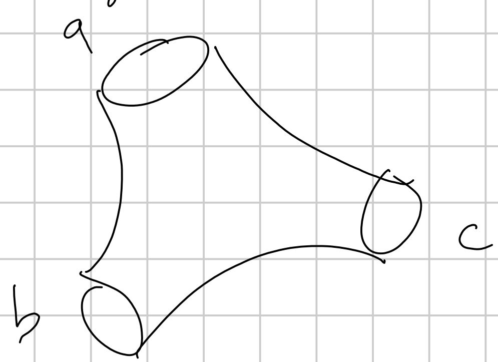
Infine, poniamo $\Theta_i = \dfrac{2\pi s_i}{l_i}$



Teorema: La funzione FN è ben definita ed è una bigezione

∘ Suriettività: Per ogni vettore $(l_1, \dots, l_{3g-3}) \in \mathbb{R}_{>}^{3g-3}$ costruire una metrica su Σ_g che realizza tali parametri

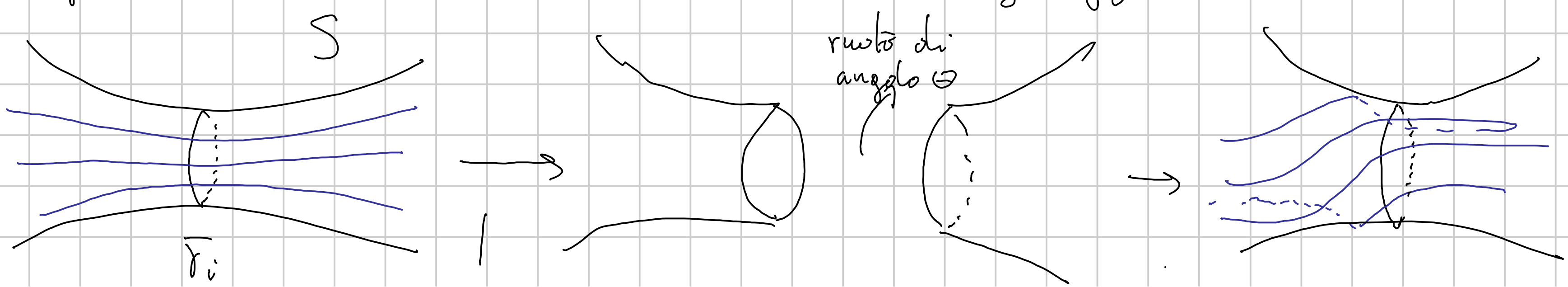
$\forall\, a,b,c>0\ \exists$ Pantalone geodetico P con lunghezze delle componenti di bordo a, b, c



Realizziamo una metrica su Σ_g a partire da un # finito di pantaloni geodetici con lunghezze delle componenti di bordo determinate da $L_1, \dots L_{3g-3}$.

Li reincolliamo lungo le componenti di bordo isometriche con un'isometria a piacere e otteniamo una metrica m su Σ_g che realizza le lunghezze $L_1, \dots, L_{3g-3}$.

- Come faccio a controllare i twist? Terremoto lungo γ_i



taglio

lungo γ_i

U intorno regolare di γ

$U \overset{\sim}{=} \gamma \times [-R, R]$ $\quad f : [-R, R] \to \mathbb{R}$ tale $f(x) = 0 \ \forall x \in [-R, \frac{R}{2}]$

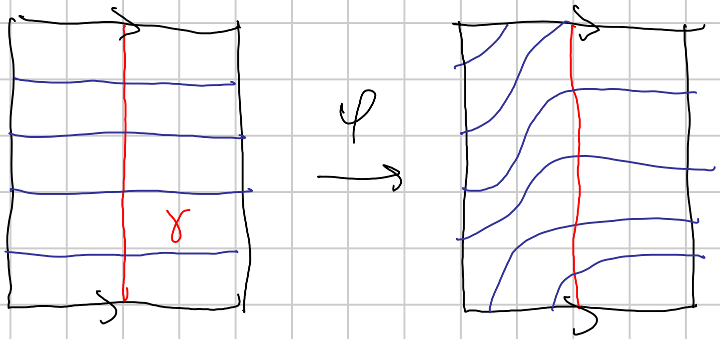
diffeo

or. pres.

$f(x) = \Theta$ su $[\frac{R}{2}, R]$

Fisso una parametrizzazione di γ.

$\varphi : U \to U \quad \varphi(\gamma(t), s) = (\gamma(t + f(s)), s)$



Definiamo un nuovo tensore m_Θ metrico su S.

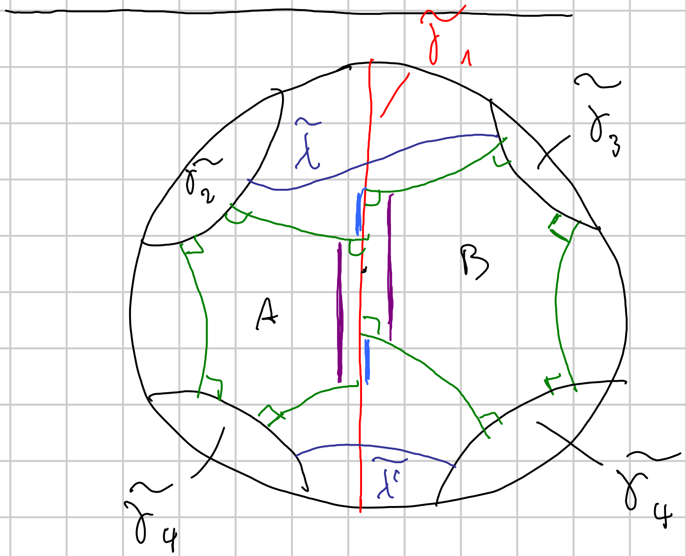
$m_\Theta = \varphi_* m$ su U e coincide con m sul complementare di U.

m_Θ è ben definito $\Rightarrow$ m_Θ è il terremoto di angolo Θ lungo γ.

Fatto: Il terremoto di angolo Θ' lungo la geodetica $\gamma_i \in \mu$ cambia la torsione lungo γ_i come $\Theta_i \to \Theta_i + \Theta'$

A meno di fare twist opportuni, possiamo scegliere liberamente su $\Theta_1, \dots, \Theta_{3g-3}$, senza cambiare $l_1, \dots, l_{3g-3}$. Surgettività: ok.

Iniettività: (facile)



A, B pentagoni ad angoli retti.

I lati di A e B che giacciono su $\tilde\gamma_1$ hanno entrambi la stessa lunghezza $= \frac{\ell(\gamma_1)}{2}$

Dato frame (μ, ν) e $\boxed{\gamma_i \in \mu}$, sia $m \in \mathrm{Teich}(S)$

$$FN(m) = (L_1, \dots, L_{3g-3}, \Theta_1, \dots, \Theta_{3g-3}).$$

$$FN(T_{\gamma_i}(m)) = (L_1, \dots, L_{3g-3}, \Theta_1, \dots, \Theta_i + 1, \dots, \Theta_{3g-3})$$

In generale è difficile scrivere esplicitamente l'azione di $MCG(S)$ su $\mathrm{Teich}(S)$.

- È difficile scrivere i cambiamenti di coordinate quando prendiamo 2 frame diversi.